

Effet de la conduction thermique sur la constante de temps d'un fil fin utilisé en anémométrie ou en thermométrie

A. AZZOUZ

Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene, Institut de Chimie Industrielle,
 Département de Cryogénie, BP 32 El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger

(Reçu le 6 avril 1990 et sous forme finale le 15 octobre 1990)

Résumé—Dans le but de mettre en évidence l'effet de la conduction thermique entre le capteur (fil chaud ou froid) et la broche, on résout par la technique de Laplace l'équation gouvernant le comportement transitoire du fil. La solution obtenue se présente sous la forme de cinq termes. Le premier correspond à la solution du fil de longueur infinie et les quatre autres mettent en évidence l'effet d'altération dû à la conduction thermique longitudinale entre l'élément sensible et la broche-support. Cet effet a été chiffré en étudiant trois fils (platine, nickel et tungstène) couramment utilisés en anémométrie ou en thermométrie.

1. INTRODUCTION

POUR UNE mesure locale et instantanée de la vitesse ou de la température dans un écoulement turbulent, on utilise un capteur qui est un fil fin. Sa longueur doit être aussi faible que possible afin de réduire le domaine dans lequel sera effectuée la moyenne spatiale de la grandeur mesurée et de se rapprocher des conditions idéales de la mesure locale. Dans l'étude qui suit, on se placera donc dans le cas de l'homogénéité de la grandeur mesurée sur toute la longueur du fil.

Les mesures instantanées nécessitent la connaissance parfaite de la réponse du capteur en régime transitoire: il s'agit de préciser le domaine de fréquence où il est possible d'obtenir une mesure correcte des fluctuations de vitesses ou de températures. Une première altération de la réponse en fréquence du capteur est due à l'inertie du fil. Dans le cas d'une longueur infinie, le fil se comporterait comme un système du premier ordre de constante de temps τ_1 ; le signal de vitesse ou de température pourrait être compensé par un filtre de la forme $[1 + (2\pi f\tau_1)^2]^{1/2}$.

Dans le cas d'un faible allongement, les travaux de Betchov [1], Maye [2], Millon *et al.* [3], Hojstrup *et al.* [4] ont mis en évidence une influence de la conduction thermique longitudinale sur la réponse en fréquence des fils.

Les théories existantes ont permis d'approfondir la connaissance de l'effet d'atténuation due à la conduction thermique. Celles-ci utilisent la technique de séparation des variables [5] ou celle de l'intégrale de Fourier-Stieltjes [6, 7].

L'analyse présentée ici est basée sur la méthode de Laplace qui présente l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la forme de la solution.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Dans le cas où le terme de rayonnement thermique est suffisamment faible pour être linéarisé et compté

dans le coefficient de transfert $h = h_c$ (convection) + h_r (rayonnement), le bilan énergétique d'un fil (température uniforme dans toute section droite) lèché par un écoulement de fluide à la température T'_g s'écrit:

$$\frac{\pi d^2}{4} \rho c \frac{\partial T'}{\partial t} = \lambda \pi \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{4I'^2}{\pi d^2} \rho_0 [1 + \alpha(T' - T'_0)] - h\pi d(T' - T'_g) \quad (1)$$

Dans cette équation, ρ , c et λ sont respectivement la masse volumique, la chaleur massique et la conductivité thermique du fil; d , I' , h , ρ_0 et α désignent respectivement le diamètre, l'intensité du courant électrique, le coefficient de transfert latéral, la résistivité électrique et le coefficient de température.

En introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes: $T = (T' - T'_0)/\Delta T'$ avec $\Delta T' = T'_c - T'_0$ où T'_c est la température au centre du fil et T'_0 est conventionnelle, par exemple la température des broches

$$t = t'a/d^2, \quad x = x'/d, \quad \beta_1 = 4h_1d/\lambda - I_1^2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^2,$$

$$K_1 = \left[\frac{4h_1d}{\lambda} (T'_{g1} - T'_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{I_1^2}{\alpha} \right] / \Delta T',$$

$$I_1 = \frac{I'_1}{d} (\rho_0 \alpha / \lambda)^{1/2}$$

l'équation (1) sous sa forme réduite s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta_1 T + K_1 \quad (2)$$

Cette équation aux dérivées partielles à coefficients supposés constants, à laquelle il faut ajouter les conditions limites et une condition initiale, représente précisément le comportement thermique réel du fil.

Les conditions limites associées sont:

NOMENCLATURE

a diffusivité thermique du fil, $\lambda/\rho c$
 B_n coefficient, équation (8)
 c chaleur massique du fil
 d diamètre du fil
 f fréquence
 h coefficient d'échange
 $I' (I)$ intensité du courant électrique réelle (réduite)
 K caractérise la sensibilité du fil
 l longueur du fil
 Nu nombre de Nusselt
 p variable complexe dans le domaine de Laplace
 Re nombre de Reynolds
 $t', (t)$ temps réel (réduit : $t = t' a/d^2$)
 $T', (T)$ température réelle (réduite : $T = (T' - T'_0)/\Delta T'$, $\Delta T' = T'_c - T'_0$ écart de température de référence)
 T'_g température réelle de l'écoulement du fluide
 T'_0 température réelle des broches
 $T'_c, (T_c)$ température réelle (réduite) au centre du fil

$x', (x)$ abscisse (réduite : $x = x'/d$).

Symboles grecs

α coefficient de température
 β inverse de la constante de temps réduite, $1/\tau$
 θ température réduite, $\beta_1 T - K_1$
 λ conductivité thermique du fil
 μ_n valeur propre de rang n
 ρ masse volumique du fil
 ρ_0 résistivité électrique du fil à T'_0
 $\tau'_1, (\tau_1)$ constante de temps réelle du fil de longueur infinie (réduite : $\tau_1 = \tau'_1 a/d^2$).

Indices

0 relatif à l'état initial
 1 relatif à l'état final
 c relatif à la température au centre du fil ($x = 0$)
 n rang de la valeur propre.

$$\text{à } x = \pm \frac{l}{2d}, \quad T = T_s,$$

$$\text{à } x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

La température réduite des broches, T_s , est ici supposée constante, c'est-à-dire qu'on admet la constante de temps des supports très grande devant celle du fil.

La condition initiale est donnée par la température d'équilibre du fil :

$$T(x, 0) = \left[T_s - \frac{K_0}{\beta_0} \right] \cosh [(\beta_0)^{1/2} x] / \cosh [(\beta_0)^{1/2} l/2d] + K_0/\beta_0 \quad (3)$$

avec

$$\beta_0 = 4h_0 d / \lambda - I_0^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2;$$

$$K_0 = \left[\frac{4h_0 d}{\lambda} (T'_g - T'_0) + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{I_0^2}{\alpha} \right] / \Delta T'$$

$$I_0 = \frac{I'_0}{d} (\rho_0 \alpha / \lambda)^{1/2}.$$

La forme non réduite analytique en cosinus hyperbolique a été vérifiée expérimentalement par Champagne *et al.* [8].

Pour étudier la réponse transitoire du fil, on peut imposer un échelon d'intensité de courant électrique

ou de température d'écoulement de fluide ou bien encore de vitesse.

3. SOLUTION DE REFERENCE DANS LE CAS OU LA LONGUEUR DU FIL EST INFINIE

Dans le cas d'un fil infiniment long, la température est uniforme et égale (équation (3)) à

$$T = K_0/\beta_0. \quad (4)$$

En régime variable, le terme de conduction $\partial^2 T/\partial x^2$ est nul et l'équation (2) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta_1 T + K_1. \quad (5)$$

Si on effectue le changement de fonction

$$\theta = \beta_1 T - K_1$$

la solution est immédiate :

$$\theta = C \exp (-t/\tau_1)$$

où $\tau_1 = 1/\beta_1$ est la constante de temps réduite du fil de longueur infinie. La constante C est déterminée par la condition initiale exprimée par l'équation (4), la solution de l'équation (5) est donnée par :

$$\theta = [\beta_1 K_0/\beta_0 - K_1] \exp (-t/\tau_1). \quad (6)$$

4. RECHERCHE DE LA SOLUTION AVEC EFFET DE LA CONDUCTION

Dans le cas où la longueur du fil est finie, le terme $\partial^2 T / \partial x^2$ n'est pas nul et la conduction thermique longitudinale affecte la distribution de température du fil.

4.1. Méthode de séparation des variables

Initialement, le fil est en équilibre à la température $T(x, 0)$ donnée par l'équation (3). Pour étudier le régime transitoire, on impose, par exemple, un échelon de courant électrique, ou de température de fluide ou de vitesse.

La technique de séparation des variables a été appliquée par Wylie [5] puis Sandborn [9] pour résoudre l'équation (1); en admettant que la solution de cette équation est l'addition de l'état stable $T(x, 0)$ et d'un état transitoire $V(x, t)$:

$$T(x, t) = T(x, 0) + V(x, t)$$

$T(x, 0)$ est la solution de l'état stable donnée par l'équation (3). Le problème présent est de déterminer $V(x, t)$; la solution est obtenue en effectuant le changement de fonction:

$$T(x, t) = T(x, 0) + \omega(x, t) \exp(-t/\tau_1). \quad (7)$$

La solution, obtenue par la méthode de séparation des variables, sous forme réduite s'écrit:

$$T(x, t) = \left[T_s - \frac{K_1}{\beta_1} \right] \frac{\cosh[(\beta_1)^{1/2} x]}{\cosh[(\beta_1)^{1/2} l/2d] + K_1/\beta_1} + \sum_{n=0}^{\infty} B'_n \exp[-(\mu_n^2 + 1/\tau_1)t] \cos(\mu_n x) \quad (8)$$

avec

$$B'_n = 4 \frac{d}{l} (-1)^n \left\{ (K_0/\beta_0 - K_1/\beta_1) / \mu_n + [T_s - K_0/\beta_0] \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \beta_0} - [T_s - K_1/\beta_1] \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \beta_1} \right\}$$

et

$$\mu_n = \frac{d}{l} (2n+1)\pi; \quad n = 0, 1, \dots$$

4.2. Méthode de Laplace

On cherche cette fois une solution de l'équation (2) en utilisant la transformation de Laplace, avec la condition initiale et les conditions limites suivantes:

—initialement, le fil est en équilibre à la température $T(x, 0)$ donnée par l'équation (3);

—la température du fil obéit aux conditions:

$$x = \pm l/2d; \quad T = T_s$$

$$x = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Pour traiter ce problème, il est préférable d'effectuer le changement de fonction:

$$\theta(x, t) = \beta_1 T(x, t) - K_1$$

l'équation (2) devient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta_1 \theta. \quad (9)$$

Le méthode de Laplace permet de transformer l'équation aux dérivées partielles (9) en une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - \bar{\theta}(p + \beta_1) = \theta(x, 0) \quad (10)$$

où $\theta(x, 0)$ est la distribution initiale de température déduite de l'équation (3).

A l'équation (10) sont associées les conditions suivantes:

$$x = \pm l/2d, \quad \bar{\theta} \left(\pm \frac{l}{2d}, p \right) = \frac{\beta_1 T_s - K_1}{p}$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = 0.$$

La solution complète dans le domaine de Laplace est donnée par:

$$\bar{\theta}(x, p) = \frac{(\beta_1 K_0/\beta_0 - K_1)}{p + \beta_1} + \frac{\beta_1 (T_s - K_0/\beta_0)}{p + \beta_1 - \beta_0} \times \frac{\cosh[(\beta_0)^{1/2} x]}{\cosh[(\beta_0)^{1/2} l/2d]} + \frac{\cosh[(\beta_1 + p)^{1/2} x]}{\cosh[(\beta_1 + p)^{1/2} l/2d]} \times \left[\frac{\beta_1 T_s - K_1}{p} + \frac{K_1 - \beta_1 K_0/\beta_0}{p + \beta_1} - \frac{\beta_1 (T_s - K_0/\beta_0)}{p + \beta_1 - \beta_0} \right]. \quad (11)$$

Pour alléger l'écriture de la solution complète, on pose:

$$U_1^- = (\beta_1)^{1/2} \left[\frac{l}{2d} (2n+1) - x \right]$$

$$U_1^+ = (\beta_1)^{1/2} \left[\frac{l}{2d} (2n+1) + x \right]$$

$$U_2^- = \left[\frac{l}{2d} (2n+1) - x \right] / 2(t)^{1/2}$$

$$U_2^+ = \left[\frac{l}{2d} (2n+1) + x \right] / 2(t)^{1/2}$$

$$U_3^- = (\beta_0)^{1/2} \left[\frac{l}{2d} (2n+1) - x \right]$$

$$U_3^+ = (\beta_0)^{1/2} \left[\frac{l}{2d} (2n+1) + x \right]$$

$$V^- = \left[\frac{l}{2d} (2n+1) - x \right] / 2(t)^{1/2}$$

$$V^+ = \left[\frac{l}{2d} (2n+1) + x \right] / \sqrt{2(t)^{1/2}}$$

$$W_1 = (\beta_1 t)^{1/2}; \quad W_3 = (\beta_0 t)^{1/2}.$$

La solution complète réelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & \left[(\beta_1 K_0 / \beta_0 - K_1) \exp(-\beta_1 t) \right] \\ & + \left[\beta_1 (T_s - K_0 / \beta_0) \frac{\cosh [(\beta_0)^{1/2} x]}{\cosh [(\beta_0)^{1/2} l / 2d]} \right. \\ & \times \exp [-(\beta_1 - \beta_0) t] - \left[\beta_1 (T_s - K_0 / \beta_0) \right. \\ & \times \exp [-(\beta_1 - \beta_0) t] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cosh (U_3) \\ & - \frac{1}{2} [\exp (U_3) \operatorname{erf} (V^+ + W_3) \\ & + \exp (-U_3) \operatorname{erf} (V^+ - W_3)] \\ & + \cosh (U_3^+) - \frac{1}{2} [\exp (U_3^+) \operatorname{erf} (V^+ + W_3) \\ & + \exp (-U_3^+) \operatorname{erf} (V^+ - W_3)] \} \left. \right] \\ & + \left[2(K_1 - \beta_1 K_0 / \beta_0) \exp(-\beta_1 t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \right. \\ & \times \{ \operatorname{erfc} (U_2) + \operatorname{erfc} (U_2^+) \} \left. \right] \\ & + \left[(\beta_1 T_s - K_1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cosh (U_1) \right. \\ & - \frac{1}{2} [\exp (U_1) \operatorname{erf} (V^+ + W_1) \\ & + \exp (U_1) \operatorname{erf} (V^+ - W_1)] + \cosh (U_1^+) \\ & - \frac{1}{2} [\exp (U_1^+) \operatorname{erf} (V^+ + W_1) \\ & + \exp (-U_1^+) \operatorname{erf} (V^+ - W_1)] \} \left. \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

La méthode de Laplace permet de présenter la solution sous la forme de cinq termes mis entre crochets au second membre :

- le premier correspond à la solution du fil de longueur infinie.
- les quatre autres correspondent à l'effet de la conduction thermique observée expérimentalement.

5. AVANTAGE DE LA METHODE DE LAPLACE

Pour comparer les méthodes de Laplace et de séparation des variables, on considère un même état initial décrit par :

$$\beta_0 = 4h_0 d / \lambda - I_0^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2$$

$$K_0 = \left[\frac{4h_0 d}{\lambda} (T'_{g0} - T'_0) + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{I_0^2}{\alpha} \right] / \Delta T'$$

La transition peut être réalisée par un échelon d'intensité de courant électrique (*I*), ou par un échelon de température du fluide (*T'g*), ou par un échelon de vitesse qui agit sur *h*. Pour calculer celui-ci, on considère que le nombre de Nusselt d'un fil perpendiculaire à la direction de l'écoulement est donné par une loi empirique de la forme *Nu* = *a* + *b Re*^{*n*}, où *Re* est le nombre de Reynolds, *a*, *b* et *n* sont des constantes. Le nouvel état d'équilibre s'écrit alors :

$$\beta_1 = 4h_1 d / \lambda - I_1^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2;$$

$$K_1 = \left[\frac{4h_1 d}{\lambda} (T'_{g1} - T'_0) + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{I_1^2}{\alpha} \right] / \Delta T'$$

Pour chiffrer et mettre en évidence l'influence de la conduction thermique longitudinale exprimée par les deux méthodes analytiques, on considère le cas d'un fil fin en platine de diamètre 5 μm. La transition est réalisée par un échelon d'intensité réduite de courant électrique variant de *I*₀ = 1,23 × 10⁻⁴ à *I*₁ = 1,99 × 10⁻⁴. La variation de la température réduite au centre du fil *T_c* en fonction du temps réel *t'*, pour différents rapports *l/d*, est représentée sur la Fig. 1.

Pour l'exemple pris, quel que soit le rapport *l/d*, on constate que les solutions obtenues avec la méthode de Laplace et de séparation de variables donnent le même résultat numérique. La technique de séparation des variables peut plaire parce qu'elle présente la solution sous une forme compacte. La méthode de Laplace donne la solution analytique en cinq termes séparés mais avec l'avantage de faire apparaître les paramètres d'influence: la forme obtenue met à nu les causes d'altération pour les fils de faible allongement et facil-

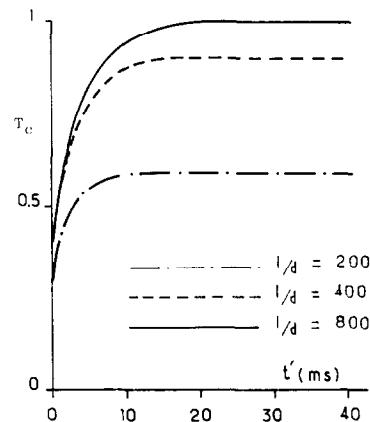


FIG. 1. Evolution de la température réduite au centre du fil en fonction du temps pour différents rapports *l/d*; cas du platine.

ite la compréhension physique de l'effet de conduction longitudinale. L'étude de ces termes d'altération permet de chiffrer leur importance respective dans le temps et aide à concevoir le type de compensation par un circuit électronique approprié.

Ces remarques montrent l'avantage de la solution obtenue par la technique de Laplace parce qu'elle n'a nécessité aucune hypothèse préalable sur la forme de solution, contrairement à la méthode de séparation des variables qui suppose une forme particulière de solution et qui ne permet pas une analyse fine du phénomène de conduction longitudinale.

6. DISCUSSION DES TERMES DE CONDUCTION OBTENUS PAR LA METHODE DE LAPLACE

On rappelle que la solution obtenue se présente sous la forme de cinq termes au second membre. Pour discuter et chiffrer leur importance respective, on considère le cas du fil de platine utilisé en anémomètre, les valeurs de ses caractéristiques étant données ci-après :

$$d = 5 \mu\text{m}; \quad \beta_0 = 3,53 \times 10^{-4}; \quad K_0 = 1,53 \times 10^{-4};$$

$$\beta_1 = 2,309 \times 10^{-4}; \quad K_1 = 2,309 \times 10^{-4};$$

$$\tau_1 = 4,4 \text{ ms.}$$

La transition est réalisée par un échelon d'intensité réduite de courant électrique de même valeur qu'au paragraphe précédent.

6.1. Le premier terme

Il correspond à la solution de référence rappelée au début de ce travail, et relative au cas du fil de longueur infinie. En effet, dès que la longueur du fil devient importante ($l/d \geq 1000$), les quatre termes d'altération qui apparaissent au second membre de l'équation (12) sont nuls et on retrouve la solution du fil long.

6.2. Le second terme

Celui-ci apparaît sous une forme rappelant la condition initiale (3) :

$$\beta_1 \left[T_s - \frac{K_0}{\beta_0} \right] \cosh [(\beta_0)^{1/2} x / \cosh [(\beta_0)^{1/2} l / 2d] \exp [-(\beta_1 - \beta_0)t].$$

L'altération due à ce terme est liée directement à l'état initial caractérisé par β_0 qui apparaît dans l'argument du cosinus hyperbolique. Non nulle à l'instant zéro, elle est représentée sur la Fig. 2 (courbes 2) en fonction du rapport l/d pour différents temps allant de l'état initial jusqu'à une valeur proche de la constante de temps τ_1 du fil long. Entre l'instant zéro et τ_1 , l'altération diminue quand le rapport l/d augmente; puis elle s'éteint quand le rapport l/d devient égal à 600.

6.3. Le troisième terme

Pour les fils habituellement utilisés $l/d > 100$, le développement de l'expression

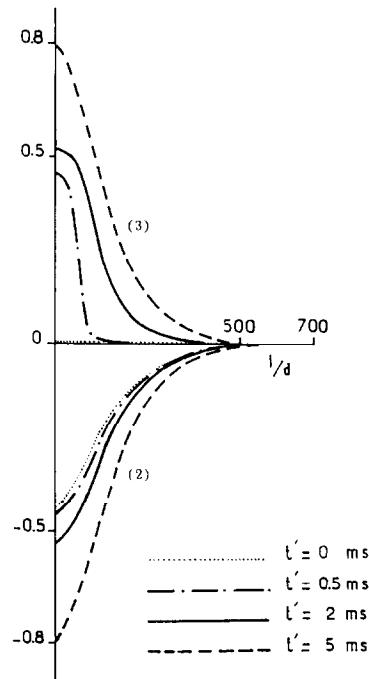


FIG. 2. Altération due au deuxième (courbes 2) et au troisième terme (courbes 3) entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps (platine).

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \exp(U_3^-) [1 - \text{erf}(V^- + W_3)] + \exp(U_3^+) [1 - \text{erf}(V^+ + W_3)] \}$$

qui figure dans le troisième terme est négligeable; cela permet d'écrire le troisième terme sous la forme :

$$-\beta_1 (T_s - K_0/\beta_0) \exp [-(\beta_1 - \beta_0)t] \times \left\{ \frac{\cosh [(\beta_0)^{1/2} x]}{2 \cosh [(\beta_0)^{1/2} l / 2d]} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \exp \left[-\beta_0^{1/2} \frac{l}{2d} (2n+1) \right] \left[\exp(x\beta_0^{1/2}) \times \text{erf}(V^- - W_3) + \exp(-x\beta_0^{1/2}) \times \text{erf}(V^+ - W_3) \right] \right\}. \quad (13)$$

Contrairement au second terme, celui-ci est nul à l'instant zéro. Ce terme est représenté par les courbes (3) de la Fig. 2. Dès que le temps devient supérieur à τ_1 , la relation (13) devient alors :

$$-\beta_1 (T_s - K_0/\beta_0) \frac{\cosh [(\beta_0)^{1/2} x]}{\cosh [(\beta_0)^{1/2} l / 2d]} \exp [-(\beta_1 - \beta_0)t].$$

Comme le deuxième et le troisième terme sont de signe contraire (courbes symétriques), leur contribution dans la conduction thermique longitudinale s'élimine quand le temps devient supérieur à τ_1 .

L'altération due à ces deux termes est fortement liée à l'état initial caractérisé par β_0 . Dans le cas de

l'anémomètre, le domaine d'influence est compris entre l'instant initial et τ_1 ; par contre dans le cas du thermomètre où le fil est très peu chauffé, leur contribution est toujours négligeable.

6.4. *Le quatrième terme*

Celui-ci fait apparaître le produit d'une exponentielle par un développement en fonctions erf complémentaires : $\text{erfc}(U^-)$ et $\text{erfc}(U^+)$.

Nulle à l'instant initial, sa contribution est sensible pendant la phase transitoire, et dès que le temps est supérieur à $3\tau_1$, son influence devient négligeable quel que soit l/d .

L'altération due à ce terme est représentée sur la Fig. 3 en fonction du rapport l/d et pour différents temps allant d'un instant proche de l'état initial jusqu'à une valeur égale à τ_1 . Aux premiers instants, l'altération présente une grande amplitude pour les faibles rapports l/d . Avec l'augmentation du temps, l'altération bien qu'amointrie décroît moins vite quand le rapport l/d croît, mais devient négligeable à $l/d = 600$ quand le temps est supérieur à $3\tau_1$.

6.5. *Le cinquième terme*

On remarque, comme pour le troisième et le quatrième termes, que si les arguments des fonctions erf sont supérieurs ou égaux à 2,5, l'effet de la conduction dû à ces termes est nul. En effet, tous les paramètres qui affectent les effets de bout sont représentés par l'argument de la fonction $\text{erf}(U)$, avec

$$U = \left[\frac{l}{2d}(2n+1) - x \right] / \left[2(t)^{1/2} - (\beta_1 t)^{1/2} \right]$$

Il est intéressant d'étudier dans quelles conditions la quantité $\text{erf}(U)$ est égale à l'unité, c'est-à-dire pratiquement lorsque $U \geq 2,5$. On constate que l'argument U est élevé aux premiers instants de la transition et à l'équilibre thermique du fil. La diffusivité thermique qui est contenue dans le temps réduit t affecte peu les variations de U .

Par contre, on peut obtenir $U \geq 2,5$ quel que soit t :

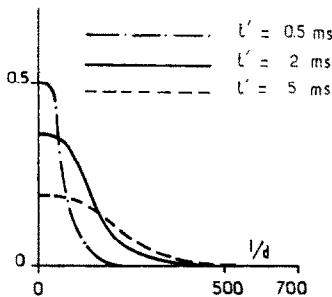


FIG. 3. Altération due au quatrième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps (platine).

(1) si la quantité β_1 est élevée, c'est-à-dire si la constante de temps réduite du fil est très faible,

(2) si le fil présente un grand allongement; cela confirme que les effets de bout deviennent négligeables lorsque la longueur du fil est importante. Ce résultat a été observé expérimentalement par plusieurs auteurs [10, 11].

Le développement de l'expression

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \exp(U_1) [1 - \text{erf}(V^- + W_1)] + \exp(U_1^+) [1 - \text{erf}(V^+ + W_1)] \}$$

qui apparaît dans le cinquième terme est négligeable; cela permet d'écrire le cinquième terme sous la forme:

$$(\beta_1 T_s - K_1) \left\{ \frac{\cosh [(\beta_0)^{1/2} x]}{2 \cosh [(\beta_1)^{1/2} l/2d]} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp \left[-\beta_1^{1/2} \frac{l}{2d} (2n+1) \right] \times [\exp(x\beta^{1/2}) \text{erf}(V^- - W_1) + \exp(-x\beta^{1/2}) \text{erf}(V^+ - W_1)] \right\} \quad (14)$$

Ce terme, nul à l'instant zéro, devient indépendant du temps dès que celui-ci est supérieur à $3\tau_1$. En effet dans ces conditions, l'expression (14) s'écrit alors:

$$(\beta_1 T_s - K_1) \left\{ \frac{\cosh [(\beta_0)^{1/2} x]}{\cosh [(\beta_1)^{1/2} l/2d]} \right\} \quad (15)$$

La forme (15) rappelle la solution d'équilibre en cosinus hyperbolique obtenue après la transition et identique à la solution initiale mais avec le changement des paramètres β_0 et K_0 en β_1 et K_1 .

Quel que soit le type de capteur utilisé, anémomètre ou thermomètre, l'altération due au cinquième terme est importante pendant la phase transitoire et après la transition. La Fig. 4 représente l'altération due à ce terme en fonction du rapport l/d pour différents temps

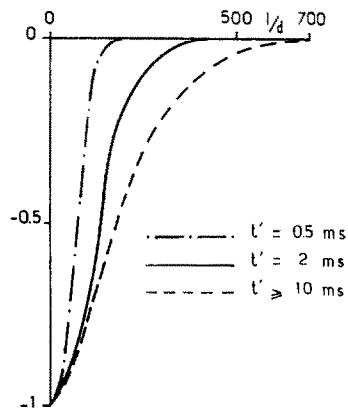


FIG. 4. Altération due au cinquième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps (platine).

Tableau 1. Propriétés physiques des matériaux considérés

Matériau	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]	c [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	$10^{-3}\rho$ [kg m ⁻³]	$10^8\rho_0$ [Ω m]	$10^3\alpha$ [K ⁻¹]
Platine	69,8	131,4	21,45	9,83	3,926
Nickel	90,5	439,5	8,90	6,30	6,700
Tungstène	178,0	138,1	19,30	5,50	4,800

Tableau 2. Valeurs relatives à l'état initial, final et au rapport l/d limite, dans un cas d'anémomètre

Matériau	Etat initial			Etat final			(l/d) limite	
	$10^2 I_0$	$10^4 K_0$	$10^4 \beta_0$	$10^2 I_1$	$10^4 K_1$	$10^4 \beta_1$	1%	5%
Platine	1,11	1,53	3,53	1,41	2,309	2,309	700	450
Nickel	1,04	1,06	2,58	1,29	1,547	1,547	800	550
Tungstène	0,57	0,90	1,63	0,73	1,300	1,300	900	650

allant d'un état proche de l'état initial jusqu'à l'équilibre thermique du fil.

7. INFLUENCE DE LA NATURE DU METAL

Quand on s'intéresse aux problèmes de la résolution spatiale de l'élément sensible, on a intérêt à choisir une longueur du fil faible. Parmi les fils fins couramment utilisés (platine, nickel et tungstène) en anémométrie ou en thermométrie, on choisira celui qui minimise l'effet de l'échange de chaleur par conduction thermique longitudinale entre l'élément sensible et la broche.

Pour choisir la nature du métal, on étudie les termes d'altération qui apparaissent dans le second membre de l'équation (12). On considère le cas d'un fil chaud placé dans un courant de convection naturelle. Pour analyser le régime transitoire du fil, on impose un échelon d'intensité de courant électrique variant de I_0 à I_1 . Les valeurs numériques des propriétés physiques des trois fils sont données par le Tableau 1. Les paramètres caractérisant l'état initial (I_0 , K_0 et β_0) et l'état final (I_1 , K_1 et β_1), sous forme adimensionnelle, sont donnés par le Tableau 2. Le coefficient K_1 caracté-

rise la sensibilité du fil et β_1 est l'inverse de la constante de temps. La Fig. 5 montre l'évolution de la température réduite au centre, pour le fil de nickel (a) et de tungstène (b), en fonction du temps et pour différents rapports l/d . En ce qui concerne les quatre termes d'altération, les observations faites dans le paragraphe précédent sont valables dans le cas considéré ici (Figs. 6-8 à rapprocher de Figs. 2-4).

La zone d'écartement correspondant au rapport l/d limite acceptable pour une influence négligeable des extrémités est obtenue en effectuant le rapport de la somme des termes d'altération sur le terme de la solution du fil de longueur infinie. La valeur de l/d limite, à 1 et 5%, pour les trois fils étudiés, est donnée par le Tableau 2.

Le tungstène qui a les valeurs K_0 , β_0 , K_1 et β_1 les plus faibles comparées à celles du platine et du nickel présente la sensibilité la plus faible, la constante de temps et le rapport l/d limite les plus élevés. Ces considérations conduisent à la conclusion que le domaine d'application du fil de tungstène est restreint.

En deçà de la zone d'écartement ($l/d < l/d$ limite), la réponse du fil ne peut pas être considérée comme liée à une seule constante de temps; par contre au-

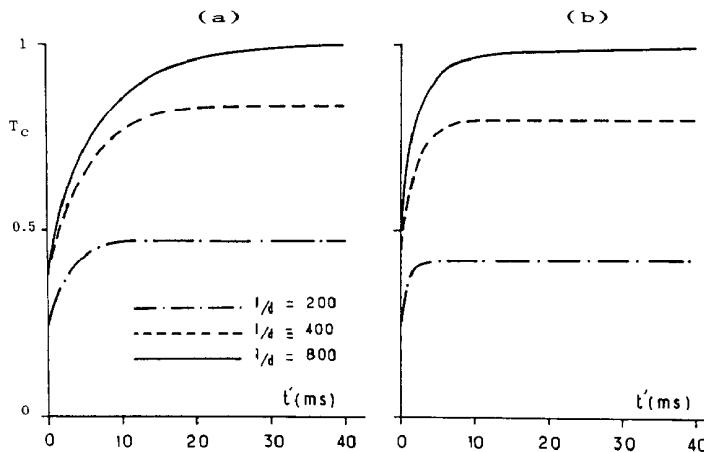


Fig. 5. Evolution de la température réduite pour deux fils ($d = 5 \mu\text{m}$) en fonction du temps et pour différents rapports l/d : (a) nickel; (b) tungstène.

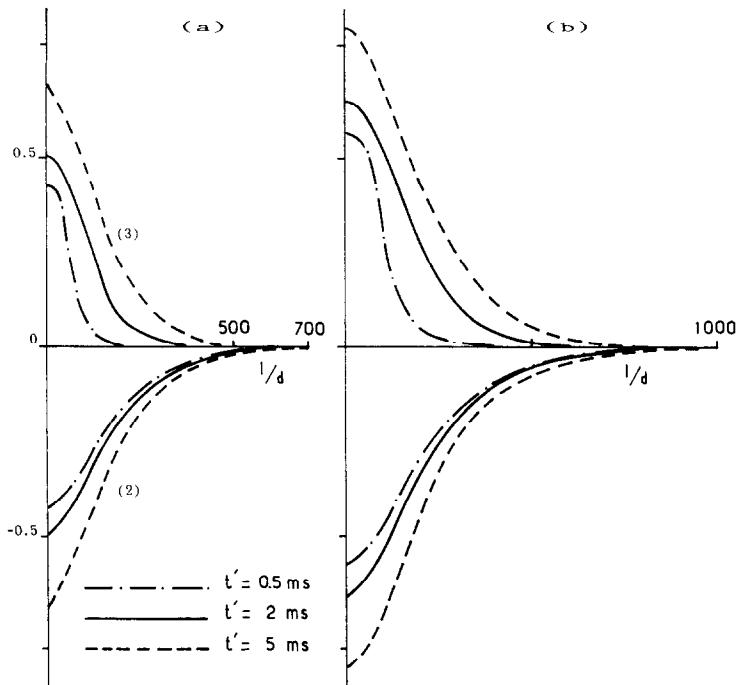


FIG. 6. Altération due au deuxième et troisième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps : (a) nickel ; (b) tungstène.

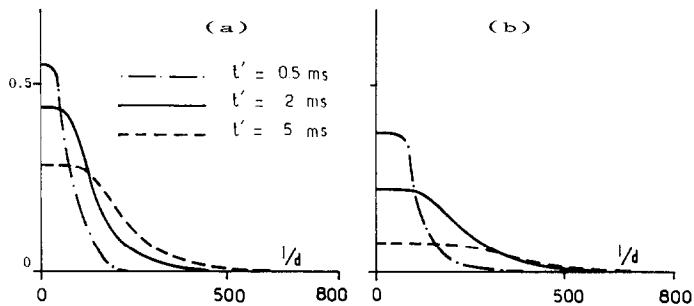


FIG. 7. Altération due au quatrième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps : (a) nickel ; (b) tungstène.

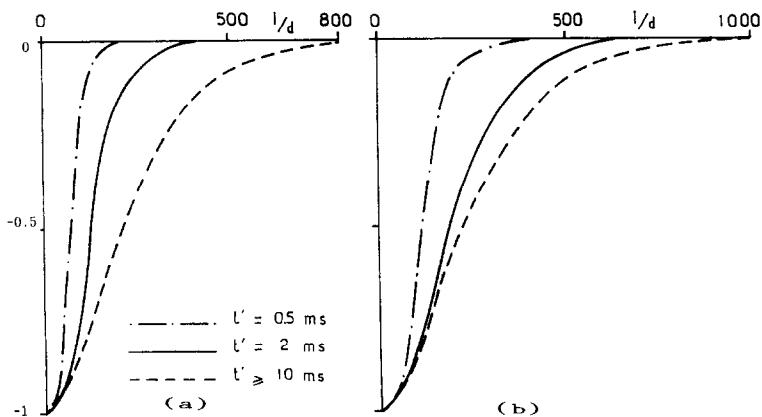


FIG. 8. Altération due au cinquième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps : (a) nickel ; (b) tungstène.

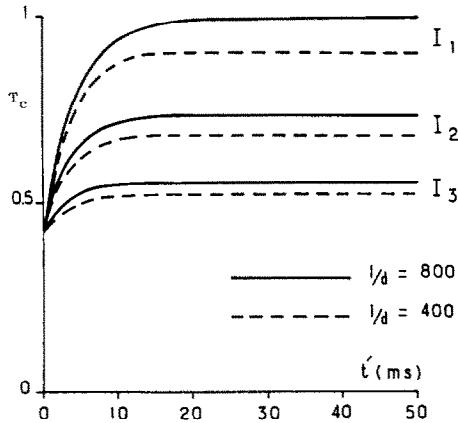


FIG. 9. Evolution de la température réduite au centre du fil de platine ($d = 5 \mu\text{m}$) en fonction du temps pour deux rapports l/d et pour différentes intensités réduites de chauffage: $I_1 = 1,41 \times 10^{-2}$, $I_2 = 1,317 \times 10^{-2}$, $I_3 = 1,22 \times 10^{-2}$.

delà de de cette zone, c'est-à-dire pour les fils de grand allongement où les termes d'altération sont nuls, la réponse du fil est à une constante de temps unique.

8. INFLUENCE DE L'INTENSITE DE CHAUFFAGE

Dans le cas où le fil est utilisé pour mesurer des fluctuations de vitesse, on a intérêt à choisir une intensité de chauffage élevée pour augmenter la sensibilité du capteur. Mais cette intensité doit être aussi faible que possible pour diminuer d'une part la constante de temps d'inertie ($\tau_i = 1/\beta_i$) et d'autre part pour limiter les effets de la conduction thermique qui sont directement liés à cette même intensité.

Pour étudier l'effet de l'intensité de chauffage, on considère le cas d'un fil en platine de diamètre $5 \mu\text{m}$, placé dans un courant de convection à la température ambiante. Pour analyser le régime dynamique du fil, on impose des échelons d'intensité I_1 , I_2 et I_3 . Les

Tableau 3. Valeurs relatives à l'état final et au rapport l/d limite pour le fil en platine de diamètre $5 \mu\text{m}$ avec un état initial: $I_0 = 1,11 \times 10^{-2}$, $K_0 = 1,53 \times 10^{-4}$ et $\beta_0 = 3,53 \times 10^{-4}$

$10^2 I_i$ ($i = 1, 2, 3$)	$10^4 K_i$	$10^4 \beta_i$	(l/d) limite 1%
1,410	2,309	2,309	700
1,317	2,016	2,725	650
1,220	1,738	3,110	600

valeurs des paramètres adimensionnels pour le même état initial que précédemment et l'état final (I_i , K_i et β_i avec $i = 1, 2, 3$) sont donnés par le Tableau 3. La Fig. 9 montre l'évolution de la température réduite au centre en fonction du temps pour différentes intensités de chauffage et pour deux rapports l/d .

Les observations précédentes concernant l'altération du signal lors du choix de la nature du fil sont valables dans le cas considéré ici (Figs. 10–12). Cependant, on note que l'altération due aux quatre termes du second membre de l'équation (12) diminue lorsqu'on réduit l'intensité de chauffage. Il en résulte que la zone d'écartement à 1% pour les trois intensités, donnée par le Tableau 3 varie dans le même sens.

Suivant le type d'utilisation (anémomètre ou thermomètre), l'intensité de chauffage doit être choisie en fonction de la sensibilité, de la constante de temps et du rapport l/d limite.

9. CAS DU THERMOMETRE

Pour analyser l'altération due à la conduction thermique longitudinale, on considère un fil fin parcouru par un courant de très faible intensité [12] afin que les mesures de fluctuations de températures ne soient pas contaminées par les fluctuations de vitesses. Le capteur est placé dans un courant de convection à la température ambiante, son état d'équilibre initial est

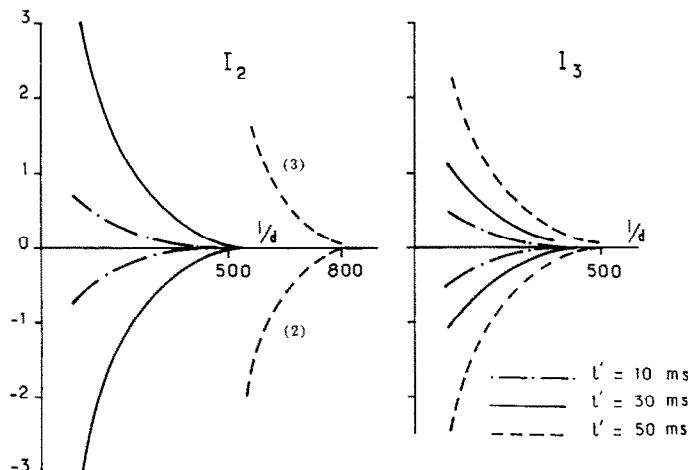


FIG. 10. Altération due au deuxième et au troisième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps: fil de platine ($d = 5 \mu\text{m}$).

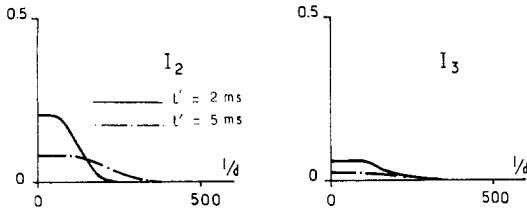


FIG. 11. Altération due au quatrième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps : fil de platine ($d = 5 \mu\text{m}$).

décrit par l'équation (3), avec les définitions correspondantes de β_0 et K_0 .

Pour étudier la réponse transitoire du fil, on impose un échelon de vitesse et de température (T'_g) d'écoulement de fluide. L'influence de la vitesse est liée au coefficient d'échange latéral (h). Le nouvel état d'équilibre du fil est décrit par :

$$K_1 = \left[\frac{4h_1 d}{\lambda} (T'_{g1} - T'_0) + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{I_1^2}{\alpha} \right] / \Delta T'$$

$$\beta_1 = 4h_1 d / \lambda - I_1^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2$$

Les caractéristiques de l'état initial (K_0 et β_0) et de l'état final (K_1 et β_1) sont données dans le Tableau 4. L'évolution de la température réduite au centre du fil en fonction du temps est représentée par la Fig. 13 pour différents rapports (l/d). Les altérations dues aux quatre termes du second membre de l'équation (12) en fonction du rapport l/d sont représentées par

les Figs. 14-16. La zone d'écartement à 1% correspondant à l/d limite est donnée par le Tableau 4. Les valeurs indiquées par celui-ci recommandent l'utilisation du fil en platine qui répond mieux aux critères de sensibilité, de constante de temps et de rapport l/d limite. Cette conclusion renforce celle qui est apparue à travers le Tableau 2 où sont comparés les trois types de métaux.

10. CONCLUSION

La solution analytique de l'équation gouvernant le comportement dynamique du fil, obtenue par la technique de Laplace se présente sous la forme de cinq termes additifs. Le premier correspond à la solution du fil de longueur infinie. Les quatre autres qui mettent en évidence l'effet d'altération dû à la conduction thermique entre l'élément sensible et la broche, deviennent rigoureusement négligeables dès que le rapport l/d limite est supérieur à 700 pour le fil de platine utilisé en anémomètre. L'importance relative entre ces quatre derniers termes d'altération dépend du type d'application envisagé : anémomètre ou thermomètre. Pour le fil en platine, qui a le meilleur comportement, le rapport l/d limite correspondant à une atténuation de 1% est égal à 700 lorsqu'il est utilisé en anémomètre dans les conditions usuelles ($d = 5 \mu\text{m}$). Ces résultats sont confirmés par ceux obtenus expérimentalement dans le cas de l'anémomètre [10]. Par contre, dans le cas du thermomètre en platine ($d = 2 \mu\text{m}$) avec les mêmes conditions que dans [3], le rapport l/d limite à

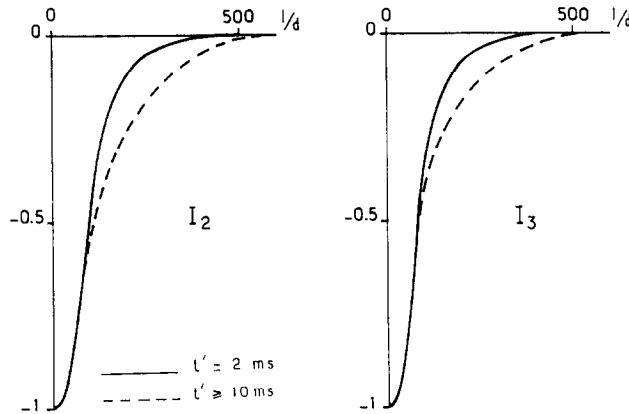


FIG. 12. Altération due au cinquième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps : fil de platine ($d = 5 \mu\text{m}$).

Tableau 4. Valeurs relatives à l'état initial, final et au rapport l/d limite dans le cas du thermomètre, $d = 2 \mu\text{m}$, échelons de vitesse et de température du fluide (air) : $V_0 = 0,1 \text{ m s}^{-1}$, $V_1 = 6 \text{ m s}^{-1}$ et $T'_{g0} = 20 \text{ C}$, $T'_{g1} = 50 \text{ C}$

Matériau	Etat initial			Etat final		(l/d) limite 1%
	$10^3 I$	K_0	$10^4 \beta_0$	$10^4 K_1$	$10^4 \beta_1$	
Platine	1,17	0	6,9	12,62	12,62	320
Nickel	1,07	0	5,32	9,70	9,70	370
Tungstène	0,60	0	2,17	4,90	4,90	450

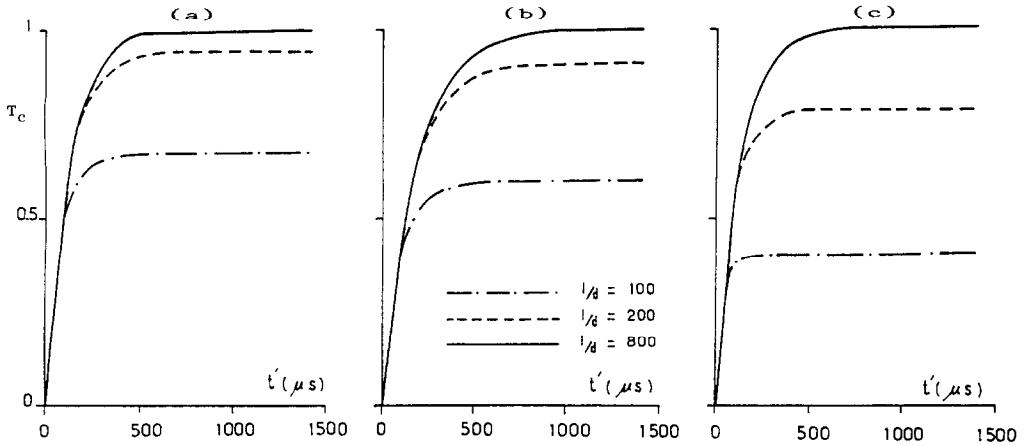


FIG. 13. Evolution de la température réduite au centre des trois fils en fonction du temps et pour différents rapports l/d : (a) platine; (b) nickel; (c) tungstène (cas du thermomètre $d = 2 \mu m$).

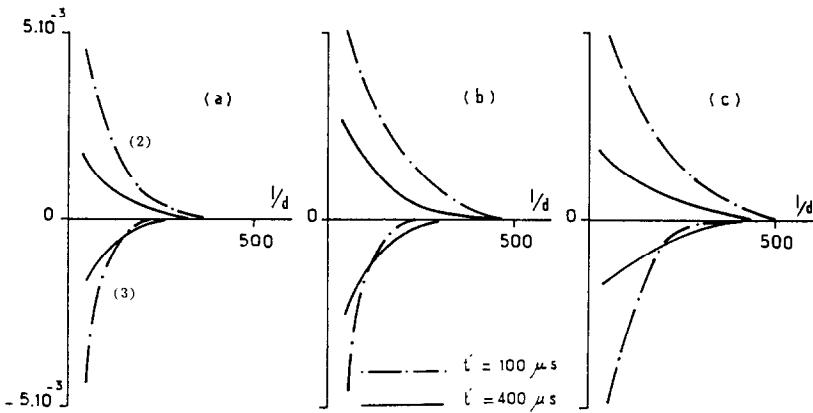


FIG. 14. Altération due au deuxième et au troisième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps: (a) platine; (b) nickel; (c) tungstène (cas du thermomètre $d = 2 \mu m$).

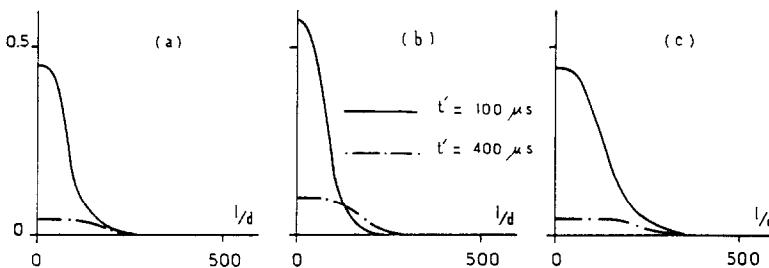


FIG. 15. Altération due au quatrième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps: (a) platine; (b) nickel; (c) tungstène (cas du thermomètre $d = 2 \mu m$).

1% se situe vers 320. On peut alors admettre une seule constante de temps. En deçà de la zone d'écartement définie à 1%, l'altération apparaît dès les premiers instants de l'échelon et devient importante pour les fils de faible allongement. Dans ces conditions, le fil ne peut pas être considéré comme n'ayant qu'une seule constante de temps.

Après comparaisons des comportements des trois fils étudiés (platine, nickel et tungstène), on recommande l'utilisation du fil de platine qui répond mieux

aux trois critères d'inertie, de sensibilité et du rapport l/d limite.

Par ailleurs, l'analyse des quatre termes d'altération montre qu'aux premiers instants de la transition inférieurs à τ_1 et pour les fils très peu chauffés, les deux premiers termes sont toujours négligeables tandis que les deux autres affectent uniquement les fils de très faible allongement $l/d < 100$. Pour les fils habituellement utilisés $l/d > 100$, le thermoanémomètre à impulsion [13, 14], où le chauffage ne dure que

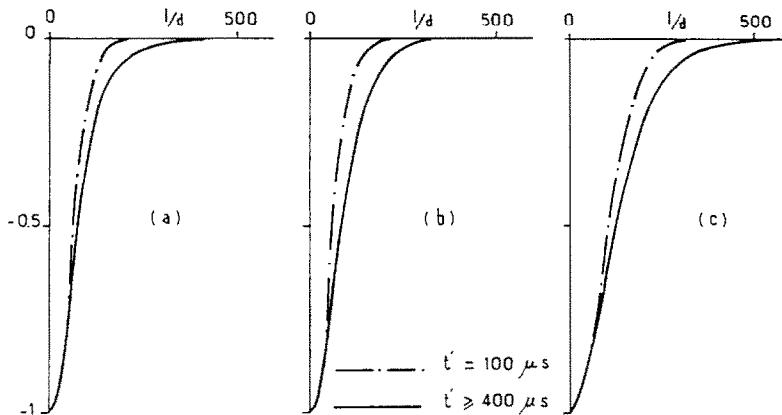


FIG. 16. Altération due au cinquième terme entre crochets de l'équation (12) en fonction du rapport l/d et pour différents temps: (a) platine; (b) nickel; (c) tungstène (cas du thermomètre $d = 2 \mu\text{m}$).

quelques micro-secondes, présente un avantage certain du point de vue de la conduction thermique longitudinale.

Remerciements—Je remercie Monsieur le Professeur J. Gosse pour les précieux conseils qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

REFERENCES

1. R. Betchov, L'influence de la conduction thermique sur les anémomètres à fils chauds, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**(6), 721 (1948).
2. J. P. Maye, Error due to thermal conduction between the sensing wire and its supports, when measuring temperatures with a wire anemometer used as a resistance thermometer, *Disa Inf.* No. 9, 22-26 (1970).
3. F. Millon, P. Paranthoen et M. Trinité, Influence des échanges thermiques entre le capteur et ses supports sur la mesure des fluctuations de température dans un écoulement turbulent, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 1-6 (1978).
4. A. E. Hojstrup, K. Rasmussen and S. E. Larsen, Dynamical calibration of temperature wires in still air, *Disa Inf.* No. 20, 22-30 (1976).
5. C. R. Wylie, *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, New York (1951).
6. C. Petit, P. Paranthoen and J. C. Lecordier, Influence of Wollaston wire and prongs on the response of cold wires at low frequencies, *Lett. Heat Mass Transfer* **8**, 281-291 (1981).
7. P. Paranthoen et C. Petit, Influence de la conduction entre le capteur et ses supports sur la mesure des fluctuations de température dans un écoulement turbulent effectuée à l'aide d'un thermomètre à résistance, *Lett. Heat Mass Transfer* **6**, 313-320 (1979).
8. F. H. Champagne, C. A. Sleicher and O. H. Wehrmann, Turbulence measurements with inclined hot wires, *J. Fluid Mech.* **28**, 153-175 (1967).
9. V. A. Sandborn, *Resistance Temperature Transducers*, Metrology Press, Fort Collins, Colorado (1972).
10. A. Baille, Loi de refroidissement des fils chauds aux faibles vitesses, Thèse, Université Aix-Marseille (1971).
11. D. C. Collis and M. J. Williams, Two-dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **6**, 357-384 (1959).
12. S. Corrsin, *Turbulence: Experimental Methods Handbook Phys.*, Vol. 3, p. 523, Springer, Berlin (1963).
13. P. Calvet, Mesure thermique dans les fluides, Thèse Sciences Physiques, Paris (1967).
14. P. Paranthoen, Etude expérimentale de la diffusion de la chaleur en aval d'une source linéaire placée dans une couche limite turbulente, Thèse Sciences Physiques, Université de Rouen (1978).

EFFECT OF THE HEAT CONDUCTION ON THE TIME CONSTANT OF A THIN WIRE USED AS AN ANEMOMETER OR THERMOMETER

Abstract—In order to clarify the effect of heat conduction between the probe (hot or cold wire) and the prongs, the governing heat equation is solved by the Laplace method. The solution of the transient regime is obtained as the addition of five terms. The first one corresponds to the infinite length and the others are directly related to the influence of the longitudinal heat conduction from the wire to the prongs. Its effect has been evaluated for three wires (platinum, nickel and tungsten) commonly used in anemometry or thermometry.

EINFLUSS DER WÄRMELEITUNG AUF DIE ZEITKONSTANTE EINES DÜNNEN, ALS ANEMOMETER ODER THERMOMETER VERWENDETEN DRAHTES

Zusammenfassung—Um den Einfluß der Wärmeleitung zwischen Sonde (heißer oder kalter Draht) und Aufspannung zu untersuchen, wird die beschreibende Wärmeleitungsgleichung mittels der Laplace-Methode gelöst. Die Lösung für das transiente Gebiet ergibt sich als Summe von fünf Termen. Der erste entspricht der Lösung für einen unendlich langen Draht, die anderen berücksichtigen den Einfluß der Längswärmeleitung vom Draht zur Aufspannung. Dieser Einfluß wird für drei verschiedene Drahtmaterialien (Platin, Nickel und Wolfram), die häufig zur Anemometrie- und Temperaturmessung eingesetzt werden, berechnet.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОСТОЯННУЮ ВРЕМЕНИ ТОНКОЙ ПРОВОЛОКИ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ В КАЧЕСТВЕ АНЕМОМЕТРА ИЛИ ТЕРМОМЕТРА

Аннотация—Уравнение теплопроводности решается методом Лапласа с целью установления влияния теплопередачи между зондом (нагретая или ненагретая проволока) и выступами. Решение для нестационарного режима получено в виде суммы пяти членов. Первый из них соответствует бесконечной длине, остальные непосредственно связаны с влиянием предельной теплопроводности от проволоки к выступам. Этот эффект оценивается для трех проволок (платиновой, никелевой и вольфрамовой), обычно применяемых в анемометрии и термометрии.